U a i troduzio e alle superfici mi ime

uca ussardi

1 I troduzio e

Oggetto di questa breve nota vuole essere una breve introduzione alla teoria geometrico-differenziale delle superfici minime. Il termine *superficie minima* fu introdotto dal matematico agrange nel 1760, per designare quelle superfici che sono soluzioni di un problema variazionale, e più precisamente punti critici del funzionale dell'area. a definizione originaria di superficie minima è dunque quella di superficie che rende stazionaria l'area rispetto a variazioni della superficie stessa.

Nel 1776 Meusnier provò che la definizione di superficie minima di agrange equivale ad una definizione più geometrica, ovvero equivale a richiedere che la superficie abbia in ogni suo punto curvatura media nulla. a teoria delle superfici minime si è poi sviluppata a partire dal 1850, anno in cui il fisico belga Plateau pose il problema che porta oggi il suo nome: *provare che per ogni curva chiusa C in $\mathbb{R}^3$ esiste una superficie S di area minima che ha C come bordo.* Una versione del problema di Plateau fu risolto da Douglas e Radò nel 1930; ulteriori generalizzazioni del problema di Plateau (capire cosa il problema intende come soluzione fa parte del problema stesso) hanno portato alla creazione di recenti e feconde branche dell'Analisi Matematica, quali la Teoria geometrica della misura, fusione perfetta tra Geometria differenziale e Calcolo delle variazioni, che fece il suo ingresso in Matematica a partire dai lavori di Ennio DeGiorgi e della sua scuola.

o scopo di questa nota è quello di illustrare anzitutto come le definizioni di superficie minima di agrange e Meusnier siano equivalenti, e di costruire successivamente esempi non banali basati su ulteriori proprietà delle superfici minime stesse.

2 Richiami di Geometria differe ziale della superficie

In questa sezione forniamo qualche cenno, senza dimostrazioni, di teoria della superficie classica in $\mathbb{R}^3$; per maggiori dettagli si veda [1]. Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice *superficie regolare* se per ogni $p \in S$ esistono un intorno V in $\mathbb{R}^3$ ed una mappa suriettiva $x\colon U \to V \cap S$, con U aperto in $\mathbb{R}^2$, tale che

1) x è differenziabile;

2) x è un omeomorfismo;

3) per ogni $q \in U$ il differenziale $dx_q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è iniettivo.

In realtà ci metteremo sempre in condizioni di più alta regolarità per x: supporremo sempre che sia data la regolarità sufficiente per i conti che svilupperemo.

Data una superficie regolare S, diciamo che x è una sua *parametrizzazione regolare*; denotiamo con $(u, v) \in U$ le *coordinate locali* del punto $p = x(u, v)$.

Denotiamo altresì con T_pS lo *spazio tangente* ad S in p, dato dallo spazio vettoriale reale di dimensione 2 generato dai vettori x_u e x_v, definiti come

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v).$$

Oltre allo spazio tangente ha notevole interesse il versore normale alla superficie S, ovvero

$$N(p) = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}(p), \quad p \in U.$$

Risulta quindi ben definita la mappa $N\colon x(U) \to \mathbb{R}^3$, e più in generale la mappa $N\colon S \to S^2$, essendo $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$; quest'ultima viene detta *mappa di Gauss.* Osserviamo che T_pS e $T_{\ (p)}(S^2)$ sono piani paralleli, e quindi possono essere identificati tra loro; ne segue che possiamo pensare $dN_p\colon T_pS \to T_pS$, che quindi opera linearmente su T_pS come segue: data una curva $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, si ha $dN_p(v) = (N_p \circ \alpha)'(0)$. a mappa dN_p misura quindi la velocità di variazione del versore normale lungo la curva α, in $t = 0$.

Definiamo quindi la *curvatura gaussiana* di S in p come $K := \det dN_p$, e la *curvatura media* di S in p come $H := -\frac{1}{2}\mathrm{tr} dN_p$. Essendo la mappa dN_p lineare e autoaggiunta, essa ammette autovalori reali $-k_1, -k_2$; diciamo che k_1 e k_2 sono le *curvature principali* di S in p. Quindi si ha anche

$$K = k_1k_2, \qquad H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Siano $E = \langle x_u, x_u\rangle$, $F = \langle x_u, x_v\rangle$ e $G = \langle x_v, x_v\rangle$; inoltre siano $e = \langle N, x_{uu}\rangle$, $f = -\langle N_u, x_v\rangle$ e $g = \langle N, x_{vv}\rangle$ (avendo denotato con x_{uu} e x_{vv} la derivata seconda di x rispettivamente rispetto ad u due volte e v due volte). In tali condizioni si dimostra che

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \tag{2.1}$$

3 Superfici mi ime

Sia data una superficie regolare S in $\mathbb{R}^3$, parametrizzata da x. Consideriamo una regione limitata $R \subseteq S$ contenuta in $x(U)$; ponendo $Q = x^{\ 1}(R)$ definiamo l'*area* della regione R come il numero reale positivo

$$(R) = \int_Q |x_u \wedge x_v|\, dudv.$$

(Tale formula discende, per esempio, dalla formula dell'area classica dell'Analisi Matematica che permette, tra le altre cose, il calcolo della misura di Hausdorff di dimensione 2 di un insieme). Osserviamo che $|x_u \wedge x_v|^2 + \langle x_u, x_v\rangle^2 = |x_u|^2|x_v|^2$, da cui $|x_u \wedge x_v| = \sqrt{EG - F^2}$, per cui si può anche riscrivere come

$$(R) = \int_Q \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Sia ora $D \subset U$ un dominio limitato, sia $h\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e sia $\varepsilon > 0$; diciamo che la funzione $\phi\colon \overline{D} \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ è la *variazione normale determinata da* h di $x(\overline{D})$ se

$$\phi(u,v,t) = x(u,v) + th(u,v)N(u,v).$$

Denotiamo anche con $x^t(u,v) = \phi(u,v,t)$; vista la regolarità di h ed N, risulta che x^t parametrizza ancora una regione di superficie regolare, che è modificata ortogonalmente rispetto a $x(D)$. In tal modo è possibile coniderare la funzione

$$(t) = \int_D \sqrt{E^tG^t - (F^t)^2}\, dudv, \qquad t \in (-\varepsilon,\varepsilon),$$

essendo E^t, F^t e G^t i corrispondenti di E, F e G per la nuova parametrizzazione x^t.

Defi izio e 3.1 *Diciamo che* $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ *parametrizza una* superficie minima S *se* $'(0) = 0$ *per ogni* $D \subset U$ *e ogni variazione normale di* $x(\overline{D})$.

Andiamo quindi a derivare la funzione (t) rispetto a t; prima però calcoliamo la quantità

$$\sqrt{E^tG^t - (F^t)^2}.$$

Si ha

$$\begin{cases} x_u^t = x_u + thN_u + th_uN \\ x_v^t = x_v + thN_v + th_vN \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} E^t = E + th(\langle x_u, N_u\rangle + \langle x_u, N_u\rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_u\rangle + t^2h_uh_u \\ F^t = F + th(\langle x_u, N_v\rangle + \langle x_v, N_u\rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_v\rangle + t^2h_uh_v \\ G^t = G + th(\langle x_v, N_v\rangle + \langle x_v, N_v\rangle) + t^2h^2\langle N_v, N_v\rangle + t^2h_vh_v. \end{cases}$$

Ricordando le espressioni per e, f e g, e l'espressione per H in (2.1) si ha che

$$E^tG^t - (F^t)^2 = EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R(t) =$$
$$= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R(t),$$

dove $R(t)$ è derivabile con $R(t)/t \to 0$ per $t \to 0$. Dunque si ha

$$(t) = \int_D \sqrt{EG - F^2}\sqrt{1 - 4thH + \overline{R}(t)}\, dudv,$$

essendo $\overline{R}(t) = R(t)/(EG - F^2)$. Per il Teorema di derivazione sotto il segno di integrale si ha

$$'(t) = \int_D \frac{(-4hH + \overline{R}'(t))\sqrt{EG - F^2}}{2\sqrt{1 - 4thH + \overline{R}(t)}}\, dudv.$$

Avendosi $R(t)/t \to 0$, per $t \to 0$, si ha pure $R'(0) = 0$; dunque

$$'(0) = -\int_Q 2hH\sqrt{EG - F^2}\, dudv. \tag{3.1}$$

Dalla (3.1) si deduce che se S ha curvatura media $H \equiv 0$ allora S è una superficie minima. Viceversa supponiamo che esista un punto $q \in D$ con $H(q) \neq 0$. Allora possiamo costruire una funzione differenziabile $h\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ con $h(q) = H(q)$ e che sia identicamente 0 al di fuori di un piccolo intorno contenente q. Allora seguendo la variazione normale determinata da h si avrebbe $'(0) < 0$, e quindi S non è una superficie minima. 'equazione delle superfici minime, in forma parametrica, viene quindi ad essere $H = 0$, ovvero

$$\langle N, x_{uu}\rangle\langle x_v, x_v\rangle + 2\langle N_u, x_v\rangle\langle x_u, x_v\rangle + \langle N, x_{vv}\rangle\langle x_u, x_u\rangle = 0.$$

Osserviamo che una superficie minima è, per definizione, punto critico del funzionale dell'area, ma non necessariamente punto di minimo del funzionale stesso. Mediante tecniche più sofisticate di Calcolo delle variazioni è possibile stabilire se e quando effettivamente il funzionale dell'area ha minimo in un suo punto critico.

4 Superfici isotermiche

Allo scopo di costruire esempi non banali di superfici minime, andiamo a considerare una classe più ristretta di parametrizzazioni; più precisamente diciamo che la parametrizzazione $x = x(u, v)$ è *isotermica* se $\langle x_u, x_u\rangle = \langle x_v, x_v\rangle$ e $\langle x_u, x_v\rangle = 0$. Osserviamo che se è data una parametrizzazione isotermica, allora, posto $\lambda^2 = \langle x_u, x_u\rangle = \langle x_v, x_v\rangle$ si ha $x_{uu} + x_{vv} = 2\lambda^2\mathbf{H}$, avendo denotato con $\mathbf{H}$ il cosidetto *vettore curvatura media* definito come $\mathbf{H} = HN$. Infatti si ha, differenziando,

$$\langle x_{uu}, x_u\rangle = \langle x_{vu}, x_v\rangle = -\langle x_u, x_{vv}\rangle.$$

Dunque $\langle x_{uu} + x_{vv}, x_u\rangle = 0$; similmente si prova che $\langle x_{uu} + x_{vv}, x_v\rangle = 0$. Ne segue che $x_{uu} + x_{vv}$ è un vettore parallelo ad N; ma x è isotermica per cui

$$H = \frac{1}{2}\frac{g + e}{\lambda^2}$$

da cui $2\lambda^2 H = g + e = \langle x_{uu} + x_{vv}, N\rangle$, e quindi $x_{uu} + x_{vv} = 2\lambda^2\mathbf{H}$.

Sia f una funzione reale di classe $C^2(U)$, con U aperto di $\mathbb{R}^2$; la quantità $f_{uu} + f_{vv}$ viene anche denotata con Δf ed è detta *laplaciano* di f; diciamo che f è *armonica* se $\Delta f = 0$. Abbiamo quindi dimostrato la seguente Proposizione:

Proposizio e 4.1 *Sia $x(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$ una parametrizzazione isotermica per una certa superficie regolare S; allora S è minima se e solo se x_i è armonica per $i = 1, 2, 3$.*

Esempio 4.2 **(Cate oide)** a *catenoide* è la superficie ottenuta per rivoluzione attorno all'asse z della catenaria $y = a\cosh(z/a)$; si ottiene una parametrizzazione

$$x(u,v) = (a\cosh v \cos u, a\cosh v \sin u, av), \qquad 0 < u < 2\pi, \quad v \in \mathbb{R}$$

che risulta essere isotermica: infatti $E = G = a^2\cosh^2 v$ mentre $F = 0$. Inoltre si verifica direttamente che $x_{uu} + x_{vv} = 0$, per cui la catenoide è una superficie minima. Si potrebbe dimostrare che la catenoide è l'unica superficie minima di rivoluzione.

Catenoide.

Esempio 4.3 **(Elicoide)** '*elicoide* è la superficie parametrizzata da

$$x(u,v) = (a\sinh v \cos u, a\sinh v \sin u, au), \qquad 0 < u < 2\pi, \quad v \in \mathbb{R}$$

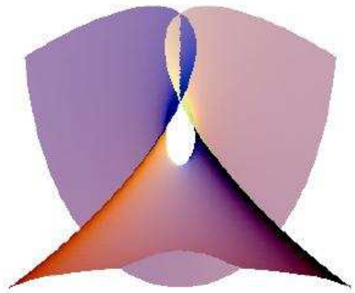
e risulta essere isotermica: infatti, come prima, risulta $E = G = a^2\cosh^2 v$, $F = 0$ e $x_{uu} + x_{vv} = 0$, per cui l'elicoide è una superficie minima. 'elicoide è una superficie rigata, ovvero costituita da rette; si potrebbe dimostrare che l'elicoide è l'unica superficie minima rigata, escluso ovviamente il caso del piano.

Elicoide.

Esempio 4.4 **(Superficie di E eper)** a *superficie di Enneper* è la superficie parametrizzata da

$$x(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right), \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Anche in tal caso è facile verificare che è isotermica e che vale $x_{uu} + x_{vv} = 0$, per cui anche la superficie di Enneper è un esempio di superficie minima. a superficie di Enneper, a differenza delle due precedenti, è una superficie che ha autointersezioni, come appare anche dalla figura qui sotto.



Superficie di Enneper.

5 Superfici mi ime e fu zio i olomorfe

Concludiamo questa breve nota con un interessante legame tra superfici minime e funzioni di variabile complessa. Ricordiamo che una funzione $f\colon U \to$, con U aperto di , è detta *olomorfa* (o derivabile in senso complesso) se esiste ed è finito

$$f'(z) = \lim_{h\to} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

per ogni $z \in U$. Denotando con $f(z) = f_1(u,v) + if_2(u,v)$, essendo $z = u + iv$, l'olomorfia di f equivale alle seguenti *condizioni di Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}.$$

Sia ora $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di una superficie regolare S; consideriamo le tre funzioni φ_1, φ_2 e φ_3 di variabile complessa date da

$$\varphi_1(z) = \frac{\partial x_1}{\partial u} - i\frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \varphi_2(z) = \frac{\partial x_2}{\partial u} - i\frac{\partial x_2}{\partial v}, \quad \varphi_3(z) = \frac{\partial x_3}{\partial u} - i\frac{\partial x_3}{\partial v},$$

dove, come al solito, $z = u + iv$ e $x(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$. Un semplice conto mostra che si ha

$$\varphi_1^2(z) + \varphi_2^2(z) + \varphi_3^2(z) = E - G + 2iF.$$

Dunque x è isotermica se e solo se $\varphi_1^2(z) + \varphi_2^2(z) + \varphi_3^2(z) = 0$; inoltre la condizione $x_{uu} + x_{vv} = 0$ equivale a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}(x_1)_u = -\dfrac{\partial}{\partial v}(x_1)_v \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial u}(x_2)_u = -\dfrac{\partial}{\partial v}(x_2)_v \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial u}(x_3)_u = -\dfrac{\partial}{\partial v}(x_3)_v \end{cases}$$

che esprime una parte delle condizioni di Cauchy-Riemann sulle funzioni φ_i. È facile verificare che le restanti condizioni sono sempre soddisfatte, per costruzione delle φ_i stesse, e dunque concludiamo che se $\varphi_1^2(z) + \varphi_2^2(z) + \varphi_3^2(z) = 0$ allora φ_i sono olomorfe se e solo se x parametrizza una superficie minima.

Esempio 5.1 **(Superficie di Scherk)** a *superficie di Scherk* è la superficie parametrizzata da

$$x(u,v)=\left(\arg\frac{z+i}{z-i},\arg\frac{z+1}{z-1},\log\left|\frac{z^2+1}{z^2-1}\right|\right),\qquad z\neq\quad 1,\quad z\neq\quad i,$$

dove $z=u+iv\in$ e $\arg z$ è l'angolo che il semiasse positivo reale forma con z. Si ha facilmente

$$\arg\frac{z+i}{z-i}=\arctan\frac{2u}{u^2+v^2-1},$$

$$\arg\frac{z+1}{z-1}=\arctan\frac{-2v}{u^2+v^2-1},$$

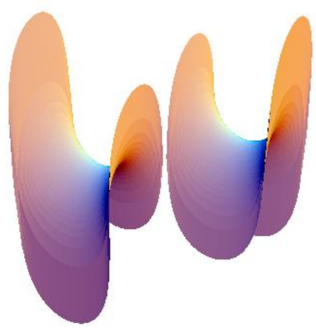
e

$$\left|\frac{z^2+1}{z^2-1}\right|=\frac{1}{2}\log\frac{(u^2-v^2+1)^2+4u^2v^2}{(u^2-v^2-1)^2+4u^2v^2}.$$

Quindi risulta

$$\varphi_1(z)=-\frac{2}{1+z^2},\quad \varphi_2(z)=-\frac{2i}{1-z^2},\quad \varphi_3(z)=\frac{4z}{1-z^4}.$$

Siccome $\varphi_1^2(z)+\varphi_2^2(z)+\varphi_3^2(z)=0$ e dal momento che le funzioni φ_i sono tutte olomorfe nel dominio dato, per quanto visto la superficie di Scherk è una superficie minima.



Superficie di Scherk.

Bibliografia

1 M.P. DoCarmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall (1976).

2 E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhäuser (1984).

3 R. Osserma , *Survey of Minimal Surfaces*, Dover (1986).